RESPOSTAS E/OU SOLUÇÕES

SEÇÃO 4.1

1. Seja S um subconjunto não vazio de $A \times B$. Então

$$S = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Logo,

$$S_1 = \{a \in A : (a, b) \in S\} \neq \emptyset \text{ e } S_1 \subseteq A.$$

Assim, pela hipótese, existe $a_1 \in S_1$ tal que $a_1 \leq a$, para todo $a \in S_1$. Também

$$S_2 = \{b \in B : (a_1, b) \in S\} \neq \emptyset \text{ e } S_2 \subseteq B.$$

Portanto, por hipótese, existe $b_1 \in S_2$ tal que $b_1 \leq b$, para todo $b \in S_2$. Agora, mostre que (a_1, b_1) é o menor elemento de S.

2. Vamos prova apenas o item (a). Dado $f \in A \times A$, obtemos

$$\varphi^*(f)(j) = (f \circ \varphi)(j) = f(\varphi(j)) \in A.$$

Portanto,

$$(f(1), f(2)) \mapsto (f(\varphi(1)), f(\varphi(2)), f(\varphi(3))) = (f(2), f(2), f(1)),$$

ou seja,

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2, x_1).$$

3. Já vimos, no Exemplo 4.8, que a família $\mathcal{F} = \{A_b : b \in B\}$, com

$$A_b = \{a \in A : f(a) = b\} = f^{-1}(b) \neq \emptyset,$$

é uma partição de A. Assim, existe um conjunto escolha C para A. Então é fácil verificar que a função

$$g = f|_C : C \to B$$

é bijetora.

4. Como $g : A \to \mathrm{Im}(g) \subseteq C$ é uma função sobrejetora temos que

$$X_c = g^{-1}(c) = \{a \in A : g(a) = c\}$$

é um subconjunto não vazio de A, para todo $c \in \mathrm{Im}(g)$. Em particular, para todo $c \in \mathrm{Im}(f)$. Seja

$$r : \mathcal{P}(A)^* \to A$$

uma função escolha para A, isto é, $r(X) \in X$, para todo $X \in \mathcal{P}(A)^*$. Então a função $h : B \to A$ definida como

$$h(b) = r(X_{f(b)}) \in X_{f(b)}, \quad \forall\ b \in B,$$

tem as propriedades desejadas, pois dado $b \in B$, obtemos

$$(g \circ h)(b) = g(h(b)) = f(b).$$

Portanto, existe uma função $h : B \to A$ tal que $g \circ h = f$

Então $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $\{a\} \in \mathcal{F}$, para todo $a \in A$. Dados $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$, definimos

$$C_1 \leq C_2 \Leftrightarrow C_1 \subseteq C_2.$$

Logo, $\mathcal{F}$ é um poset. Sejam $\mathcal{C}$ uma cadeia qualquer de $\mathcal{F}$ e

$$M = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Então prove que $M \in \mathcal{F}$ e use o Lema de Zorn.

3. Confira o Execício anterior.

4. (a) Sejam $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{F}$. Então, pela Lei de De Morgan,

$$A - \left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{n} X_i' = \bigcup_{i=1}^{n} (A - X_i)$$

é finito, pois cada $A - X_i$ é finito. Logo,

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{F}.$$

(b) Se $X \in \mathcal{F}$ e $A \supseteq Y \supseteq X$, então $A - Y \subseteq A - X$. Assim, $A - Y$ é finito, pois $A - X$ é finito. Portanto, $Y \in \mathcal{F}$.

(c) Como $A - \emptyset = A$ temos que $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Portanto, $\mathcal{F}$ é um filtro próprio sobre o conjunto A. Finalmente, a família

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ é um filtro próprio sobre } A\}$$

é não vazia. Dados $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{A}$, definimos

$$\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2.$$

Logo, $\mathcal{A}$ é um poset. Sejam $\mathcal{C}$ uma cadeia qualquer de $\mathcal{A}$ e

$$M = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}.$$

Então prove que $M \in \mathcal{A}$ e use o Lema de Zorn.

10. Vamos provar simultaneamente os itens (*a*) e (*b*). Seja

$$\mathcal{F} = \{\gamma : \gamma \text{ é um conjunto de vetores LI de } V \text{ e } \alpha \subseteq \gamma \subseteq \beta\}.$$

Então $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $\alpha \in \mathcal{F}$. Dados $\gamma, \delta \in \mathcal{F}$, definimos

$$\gamma \leq \delta \Leftrightarrow \gamma \subseteq \delta.$$

Logo, $\mathcal{F}$ é um poset. Sejam $\mathcal{C}$ qualquer cadeia de $\mathcal{F}$ e

$$L = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{C}} \gamma.$$

Vamos provar que $L \in \mathcal{F}$. De fato, sejam $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vetores distintos de L e $x_1, \ldots, x_n$ escalares de K tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = 0.$$

Como $\mathbf{u}_i \in L$ temos que existe $\gamma_i \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{u}_i \in \gamma_i$, pelo Exemplo 4.25, existe γ_j, com $1 \leq j \leq n$, tal que $\gamma_i \leq \gamma_j$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \gamma_j$. Portanto,

$$x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

É claro que L é uma cota superior de $\mathcal{C}$. Logo, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ contém um elemento maximal, digamos δ. Portanto, pelo Lema 4.28, δ é uma base de V.

SEÇÃO 4.3

1. Basta provar que a função $f : \mathbb{N} \times I \to \mathbb{R}_+$ definida como $f(n, x) = n + x - 1$ tem as propriedades desejadas. Note que qualquer elemento de $I \times \mathbb{N}$ possui um sucessor imediato, enquanto $\mathbb{R}_+$ não.

2. Sejam A um poset não vazio qualquer e

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq A : B \text{ é bem ordenado}\}$$

Logo, $\mathcal{F}$ é um poset. Seja $\mathcal{C} = \{H_i : i \in I\}$ uma cadeia qualquer de $\mathcal{F}$. Então

$$M = \bigcup_{i \in I} H_i$$

é um subgrupo de G. De fato, é claro que $M \neq \emptyset$, pois $e \in H_i$, para todo $i \in I$. Dados $a, b \in M$, existem $i, j \in I$ tais que $a \in H_i$ e $b \in H_j$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia temos que $H_i \subseteq H_j$ ou $H_j \subseteq H_i$, digamos $H_i \subseteq H_j$. Logo, $a, b \in H_j$ e $ab^{-1} \in H_j$, pois H_i é um subgrupo de G. Portanto, $ab^{-1} \in M$ e M é um subgrupo de G. É claro que M é uma cota superior de $\mathcal{C}$. Vamos provar que $M \in \mathcal{F}$. De fato, dados $a, b \in M$, existem $i, j \in I$ tais que $a \in H_i$ e $b \in H_j$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia temos que $H_i \subseteq H_j$ ou $H_j \subseteq H_i$, digamos $H_i \subseteq H_j$. Logo, $a, b \in H_j$ e $ab = ba$, pois H_i é um subgrupo abeliano de G. Finalmente, pelo Lema de Zorn, M é um elemento maximal de $\mathcal{F}$. Portanto, M é um subgrupo maximal abeliano de A.

9. Seja $\mathcal{F}$ a família de todos os ideais J em A, onde $I \subseteq J$ e $J \neq A$. Então $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $I \in \mathcal{F}$. Dados $J, K \in \mathcal{F}$, definimos

$$J \leq K \Leftrightarrow J \subseteq K.$$

Logo, $\mathcal{F}$ é um poset. Seja $\mathcal{C} = \{J_i : i \in \Lambda\}$ uma cadeia qualquer de $\mathcal{F}$. Então

$$M = \bigcup_{i \in \Lambda} J_i$$

é um ideal em A. De fato, é claro que $M \neq \emptyset$, pois $0 \in J_i$, para todo $i \in \Lambda$. Dados $a, b \in M$, existem $i, j \in \Lambda$ tais que $a \in J_i$ e $b \in J_j$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia temos que $J_i \subseteq J_j$ ou $J_j \subseteq J_i$, digamos $J_i \subseteq J_j$. Logo, $a, b \in J_j$ e $a - b, ab \in J_j$, pois J_i é um ideal em A. Portanto, $a - b, ab \in M$ e M é um ideal em A. É claro que M é uma cota superior de $\mathcal{C}$. Vamos provar que $M \in \mathcal{F}$. De fato, se $M = A$, então $1 \in M$. Logo, existe $i \in \Lambda$ tal que $1 \in J_i$. Assim, $J_i = A$, o que é impossível. Finalmente, pelo Lema de Zorn, M é um elemento maximal de $\mathcal{F}$. Portanto, M é um ideal maximal em A contendo I.

6. Seja A um conjunto não vazio indutivamente ordenado. Então existe uma função escolha $r : \mathcal{P}(A)^* \to A$ para A. Agora, vamos construir, indutivamente, uma sequência crescente $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ como $f(0) = a_0$ e

$$f(n) = r(\{a_0, \ldots, a_{n-1}\})$$

a cota superior do conjunto

$$\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}.$$

Assim, f está bem definida e é crescente. Então obtemos a cadeia

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$$

a qual possui uma cota superior. Portanto, A possui um elemento maximal, pois qualquer cadeia possui uma cota superior.

7. Note que $\mathcal{G} \neq \emptyset$, pois $\{e_G\} \in \mathcal{G}$. Dados $H, K \in \mathcal{G}$, definimos

$$H \leq K \Leftrightarrow H \subseteq K.$$

Logo, $\mathcal{G}$ é um poset. Seja $\mathcal{C} = \{H_i : i \in I\}$ uma cadeia qualquer de $\mathcal{G}$. Então

$$M = \bigcup_{i \in I} H_i$$

é um subgrupo de G. De fato, é claro que $M \neq \emptyset$, pois $e \in H_i$, para todo $i \in I$. Dados $a, b \in M$, existem $i, j \in I$ tais que $a \in H_i$ e $b \in H_j$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia temos que $H_i \subseteq H_j$ ou $H_j \subseteq H_i$, digamos $H_i \subseteq H_j$. Logo, $a, b \in H_j$ e $ab^{-1} \in H_j$, pois H_j é um subgrupo de G. Portanto, $ab^{-1} \in M$ e M é um subgrupo de G. É claro que M é uma cota superior de $\mathcal{C}$. Vamos provar que $M \in \mathcal{G}$. De fato, como $H_i \subseteq S$, para todo $i \in I$, temos que $M \subseteq S$. Finalmente, pelo Lema de Zorn, M é um elemento maximal de $\mathcal{G}$. Portanto, M é um subgrupo maximal de G.

8. Sejam G um grupo qualquer e $\mathcal{F}$ a família de todos os subgrupos abelianos de G. Então $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $\{e\} \in \mathcal{F}$. Dados $H, K \in \mathcal{F}$, definimos

$$H \leq K \Leftrightarrow H \subseteq K.$$

6. Seja A um conjunto não vazio indutivamente ordenado. Então existe uma função escolha $r : \mathcal{P}(A)^* \to A$ para A. Agora, vamos construir, indutivamente, uma sequência crescente $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ como $f(0) = a_0$ e
$$f(n) = r(\{a_0, \ldots, a_{n-1}\})$$
a cota superior do conjunto
$$\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}.$$
Assim, f está bem definida e é crescente. Então obtemos a cadeia
$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$$
a qual possui uma cota superior. Portanto, A possui um elemento maximal, pois qualquer cadeia possui uma cota superior.

7. Note que $\mathcal{G} \neq \emptyset$, pois $\{e_G\} \in \mathcal{G}$. Dados $H, K \in \mathcal{G}$, definimos
$$H \leq K \Leftrightarrow H \subseteq K.$$
Logo, $\mathcal{G}$ é um poset. Seja $\mathcal{C} = \{H_i : i \in I\}$ uma cadeia qualquer de $\mathcal{G}$. Então
$$M = \bigcup_{i \in I} H_i$$
é um subgrupo de G. De fato, é claro que $M \neq \emptyset$, pois $e \in H_i$, para todo $i \in I$. Dados $a, b \in M$, existem $i, j \in I$ tais que $a \in H_i$ e $b \in H_j$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia temos que $H_i \subseteq H_j$ ou $H_j \subseteq H_i$, digamos $H_i \subseteq H_j$. Logo, $a, b \in H_j$ e $ab^{-1} \in H_j$, pois H_j é um subgrupo de G. Portanto, $ab^{-1} \in M$ e M é um subgrupo de G. É claro que M é uma cota superior de $\mathcal{C}$. Vamos provar que $M \in \mathcal{G}$. De fato, como $H_i \subseteq S$, para todo $i \in I$, temos que $M \subseteq S$. Finalmente, pelo Lema de Zorn, M é um elemento maximal de $\mathcal{G}$. Portanto, M é um subgrupo maximal de G.

8. Sejam G um grupo qualquer e $\mathcal{F}$ a família de todos os subgrupos abelianos de G. Então $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $\{e\} \in \mathcal{F}$. Dados $H, K \in \mathcal{F}$, definimos
$$H \leq K \Leftrightarrow H \subseteq K.$$

2. Seja
$$S_a = \{x \in A : a \leq x\}.$$
Então S_a com a ordem induzida por A é um conjunto indutivamente ordenado. Assim, pelo Lema de Zorn, S_a possui pelo menos um elemento maximal, digamos $b \in S_a$. Agora, vamos provar que b é o elemento maximal de A. De fato, seja $m \in A$ tal que $b \leq m$. Então $a \leq m$, pois $a \leq b$. Logo, $m \in S_a$. Portanto, $m \leq b$, isto é, $m = b$. Neste caso, A possui pelo menos um elemento maximal b tal que $b \geq a$.

3. Seja
$$\mathcal{F} = \{C \subseteq A : C \text{ é uma cadeia de } A \text{ e } B \subseteq C\}.$$
Então $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $B \in \mathcal{F}$. Agora, confira o Exercício 1.

4. Considere a família
$$\mathcal{F} = \{(B, \mathcal{C}) : B \subseteq A \text{ e } \mathcal{C} \text{ uma cobertura contável disjunta de } B\}.$$
Então, pelo Exemplo 4.13, $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $(E, \{E\}) \in \mathcal{F}$, com E um subconjunto contável de A. Agora, confira os Exercícios anteriores.

5. (a) Sejam $\mathcal{C}$ uma cadeia qualquer de $\mathcal{A}$ e
$$M = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$
Então vamos provar que $M \in \mathcal{A}$ e que M é uma cota superior de $\mathcal{C}$. De fato, seja B um subconjunto finito qualquer de M. Então existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $M \subseteq C$, pois existem $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ tais que
$$C \subseteq C_1 \cup \cdots \cup C_n.$$
Logo, pelo Exemplo 4.25, existe C_j, com $1 \leq j \leq n$, tal que $C_i \leq C_j$, para todo $i = 1, \ldots n$. Portanto, $C \subseteq C_j$, ou seja, $M \in \mathcal{A}$ e claramente M é uma cota superior de $\mathcal{C}$.

(b) Consequência direta do Lema de Zorn.

disjuntos aos pares e pondo

$$A = \mathcal{A},\ B = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X \ \text{e}\ G = \{(X, x) : X \in \mathcal{A},\ x \in X\} \subseteq X \times X.$$

Então existe

$$f : A \to B,$$

com $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(G) = \mathcal{A}$, tal que $f(X) = x \in X$, para todo $X \in \mathcal{A}$ e $f \subseteq G$. Portanto, o conjunto $C = f(\mathcal{A})$ possui as propriedades desejadas, pois dado $X \in \mathcal{A} = \mathrm{Dom}(f)$, obtemos $(X, x) \in G$. Logo, se $f(X) = x \in C$, então $f(X) \in C \cap X$. Por outro lado, se $y \in C \cap X$, então existe $Y \in \mathcal{A}$ tal que $y = f(Y)$, ou seja, $(Y, y) \in G$ e $y \in Y$. Assim, $y \in X \cap Y$, de modo que $X = Y$. Portanto,

$$y = f(Y) = f(X) \ \text{e}\ C \cap X = \{f(X)\}.$$

SEÇÃO 4.2

1. Sejam A um poset não vazio qualquer e

$$\mathcal{F} = \{C \subseteq A : C \text{ é uma cadeia de } A\}.$$

Então $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $\{x\} \in \mathcal{F}$, para todo $x \in A$. Dados $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$, definimos

$$C_1 \leq C_2 \Leftrightarrow C_1 \subseteq C_2.$$

Logo, $\mathcal{F}$ é um poset. Sejam $\mathcal{C}$ uma cadeia qualquer de $\mathcal{F}$ e

$$M = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Então vamos provar que $M \in \mathcal{F}$ e $M = \sup(\mathcal{C})$. De fato, dados $x, y \in M$, existem $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tais que $x \in C_1$ e $y \in C_2$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia temos que $C_1 \subseteq C_2$ ou $C_2 \subseteq C_1$, digamos $C_1 \subseteq C_2$. Logo, $x, y \in C_2$ e $x \leq y$ ou $y \leq x$, pois C_2 é uma cadeia. Portanto, M é uma cadeia. É fácil verificar que $M = \sup(\mathcal{C})$. Assim, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ contém pelo menos um elemento maximal, $C \in \mathcal{F}$. Portanto, C é uma cadeia maximal de A.

5. Sejam $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i\in I}$ uma família de conjuntos não vazios disjuntos aos pares e
$$B = \bigcup_{i\in I} A_i.$$
Então a função $h : B \to \mathcal{F}$ definida como $h(b) = A_i$, onde $b \in A_i$, é claramente sobrejetora. Então, pelo Exemplo 4.15, existe uma função $g : \mathcal{F} \to B$ tal que $h \circ g = I_{\mathcal{F}}$. Note que $r : I \to \mathcal{F}$ definida como $r(i) = A_i$ é uma função (sobrejetora) e $f = g \circ r : I \to B$ é uma função. Portanto,
$$f \in \prod_{i\in I} A_i \Rightarrow \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset.$$

6. Seja
$$r : \mathcal{P}(B)^* \to B$$
uma função escolha para B, isto é, $r(Y) \in Y$, para todo $Y \in \mathcal{P}(B)^*$. Então a função $f : A \to B$ definida como
$$f(x) = r(F(x)) \in F(x), \ \forall \ x \in A,$$
tem as propriedades desejadas. Reciprocamente, como $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(F)$ temos, pelo Exercício 3, que existe uma função $r : \mathcal{P}(B)^* \to B$ tal que $F \circ r = f$. Portanto, r é uma função escolha para B, pois $r(X) \in X$, para todo $X \in \mathcal{P}(B)^*$.

7. Note que para cada $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in G$. Para um $x \in A$ fixado, consideremos
$$A_x = \{x\} \times \{y \in B : (x, y) \in G\}.$$
Então $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x\in A}$ é uma família de conjuntos não vazios disjuntos aos pares. Assim, existe um conjunto C tal que
$$C \cap A_x = \{(x, y)\}.$$
A função $f : A \to B$ definida como $y = f(x)$, onde $(x, y) \in C \cap A$, é tal que $f \subset G$. Reciprocamente, seja $\mathcal{A}$ uma família de conjuntos não vazios

2. Vamos prova apenas o item (a). Dado $f \in A \times A$, obtemos

$$\varphi^*(f)(j) = (f \circ \varphi)(j) = f(\varphi(j)) \in A.$$

Portanto,

$$(f(1), f(2)) \mapsto (f(\varphi(1)), f(\varphi(2)), f(\varphi(3))) = (f(2), f(2), f(1)),$$

ou seja,

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2, x_1).$$

3. Já vimos, no Exemplo 4.8, que a família $\mathcal{F} = \{A_b : b \in B\}$, com

$$A_b = \{a \in A : f(a) = b\} = f^{-1}(b) \neq \emptyset,$$

é uma partição de A. Assim, existe um conjunto escolha C para A. Então é fácil verificar que a função

$$g = f|_C : C \to B$$

é bijetora.

4. Como $g : A \longrightarrow \mathrm{Im}(g) \subseteq C$ é uma função sobrejetora temos que

$$X_c = g^{-1}(c) = \{a \in A : g(a) = c\}$$

é um subconjunto não vazio de A, para todo $c \in \mathrm{Im}(g)$. Em particular, para todo $c \in \mathrm{Im}(f)$. Seja

$$r : \mathcal{P}(A)^* \longrightarrow A$$

uma função escolha para A, isto é, $r(X) \in X$, para todo $X \in \mathcal{P}(A)^*$. Então a função $h : B \to A$ definida como

$$h(b) = r(X_{f(b)}) \in X_{f(b)}, \quad \forall\ b \in B,$$

tem as propriedades desejadas, pois dado $b \in B$, obtemos

$$(g \circ h)(b) = g(h(b)) = f(b).$$

Portanto, existe uma função $h : B \to A$ tal que $g \circ h = f$